STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1964-16r

Ueber die Nichtexistenz "stetiger" Borel-Masse.

G. Helmberg.

Reprinted from:
Mathematische Zeitschrift, 83 (1964), p 261-266.

1964

HELMBERG, G.
Math. Zeitschr. 83, 261–266 (1964)

Über die Nichtexistenz „stetiger" Borel-Maße

Von
GILBERT HELMBERG

Es sei X ein lokal kompakter Hausdorffscher Raum, $\mathfrak{B}$ die Klasse der Borel-Mengen in X (d.h. der von allen kompakten Untermengen von X erzeugte σ-Ring) und μ ein Borel-Maß auf X, d.h. eine nicht negative reellwertige σ-additive Mengenfunktion auf $\mathfrak{B}$, die jeder kompakten Menge ein endliches Maß zuteilt. Für $M \subset X$ sei M^0 der offene Kern von M, M^- die abgeschlossene Hülle von M und M' das Komplement von M. Jede Borel-Menge ist σ-beschränkt (d.h. in einer abzählbaren Vereinigung kompakter Mengen enthalten [2], § 51 A). Unter der Voraussetzung $M \in \mathfrak{B}$ gilt daher stets $M^0 \in \mathfrak{B}$ und $M \cap A = M \setminus A' \in \mathfrak{B}$ für jede abgeschlossene Untermenge A von X ($\setminus$ bedeute mengentheoretische Subtraktion), jedoch nicht unbedingt $M^- \in \mathfrak{B}$.

Eine Menge $M \in \mathfrak{B}$ heißt üblicherweise *μ-Stetigkeitsmenge* (s. z.B. [5], S. 2, [1], S. 94), wenn $\mu(M^0) = \mu(M) = \sup\{\mu(E)\colon E \subset M^-, E \in \mathfrak{B}\}$ gilt. Die in maßtheoretischen Fragestellungen gelegentlich auftretende Notwendigkeit, von μ zu verlangen, daß gewisse nirgends dichte Randmengen Nullmengen sind, legt die Versuchung nahe, dies für eine unnötig große Klasse solcher Randmengen zu verlangen und „Stetigkeit" eines Borel-Maßes μ durch eine der folgenden Forderungen zu definieren:

(1) *Jede Borel-Menge ist μ-Stetigkeitsmenge.*

(2) *Jede Borel-Menge mit nirgends dichtem Rand ist μ-Stetigkeitsmenge.*

(3) *Jede abgeschlossene Borel-Menge ist μ-Stetigkeitsmenge.*

Offenbar ist die Forderung (3) schwächer als (2) und (2) schwächer als (1). In einem separablen Raum X ohne isolierte Punkte ist (1) überhaupt nur durch das triviale Maß $\mu \equiv 0$ erfüllt, wie man sieht, wenn man für $M \in \mathfrak{B}$ eine abzählbare überall dichte Untermenge von X setzt. Tatsächlich ist, wie im folgenden gezeigt werden soll, unter diesen Voraussetzungen (speziell also auch in einem endlichdimensionalen euklidischen Raum) bereits die Forderung (3) nur für das triviale Maß erfüllt. Der Nachweis hiervon und einiger damit zusammenhängender Aussagen gründet sich auf eine bekannte Konstruktion nirgends dichter abgeschlossener Mengen positiven Lebesgueschen Maßes auf der Zahlengeraden nach dem Muster der Konstruktion der Cantor-Menge (s. z.B. [4], Kap. III, Aufg. 7).

Die Forderung (3) ist nur scheinbar schwächer als (2), in Wirklichkeit aber äquivalent zu (2). Um das zu sehen, bemerken wir, daß zufolge der Zerlegung $M^- = M^0 \cup (M^- \setminus M^0)$ die Forderungen (1)–(3) die folgenden jeweils äquivalenten Formulierungen (1')–(3') zulassen:

(1′) $\sup\{\mu(E): E\in\mathfrak{B},\ E\subset(M^-\setminus M^0)\}=0$ *für jede Borel-Menge* M.

(2′) $\mu(M)=0$ *für jede nirgends dichte Borel-Menge* M.

(3′) $\mu(M)=0$ *für jede abgeschlossene nirgends dichte Borel-Menge* M.

Es sei (3′) erfüllt und M irgendeine nirgends dichte Borel-Menge. Dann ist M σ-beschränkt, etwa $M\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$ (K_n kompakt) und $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}(M\cap K_n)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(M^-\cap K_n)$. Da die abgeschlossene Menge $M^-\cap K_n$ für jedes n kompakt (also Borel-Menge) und nirgends dicht ist, gilt $\mu(M)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(M^-\cap K_n)=0$.

Wenn X isolierte Punkte enthält, dann gibt es tatsächlich stets nichttriviale Borel-Maße, die sogar (1) erfüllen. Es sei nämlich $Y\subset X$ die Menge aller isolierten Punkte in X und μ konzentriert auf Y, d.h. $\mu(E)=0$ für alle Borel-Mengen $E\subset(X\setminus Y)$. Für jede Untermenge M von X erhalten wir $(M^-\setminus M^0)\subset(X\setminus Y)$, also gilt (1′).

Wir betrachten im folgenden deshalb lokal kompakte Hausdorffsche Räume ohne isolierte Punkte. Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Separabilität (d.h. der Existenz einer abzählbaren überall dichten Menge) beweisen wir dabei etwas mehr als die eingangs erwähnte Behauptung, nämlich (für jedes Borel-Maß μ) die Existenz einer offenen, überall dichten Borel-Menge von beliebig kleinem Maß.

Hilfssatz 1. *Es sei X ein lokal kompakter Hausdorffscher Raum und μ ein Borel-Maß auf X, das der Forderung (3′) genügt. Existiert zu jedem $\varepsilon>0$ eine offene, überall dichte Borel-Menge B, für die $\mu(B)<\varepsilon$ gilt, dann ist μ das triviale Maß.*

Beweis. Es sei $M\in\mathfrak{B}$ und $\mu(M)>0$. Wir wählen eine offene, überall dichte Borel-Menge B so, daß $\mu(B)<\mu(M)$ gilt. Dann ist $M\setminus B$ meßbar, nirgends dicht in X und $\mu(M\setminus B)\geqq\mu(M)-\mu(B)>0$, im Widerspruch zur angenommenen Gültigkeit von (2′).

Die Tatsache, daß wir weder das erste Abzählbarkeitsaxiom noch Regularität des Maßes μ voraussetzen, macht einige Hilfsüberlegungen notwendig. Für $x\in X$ sei $\mathfrak{V}(x)$ eine Umgebungsbasis von x. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir im folgenden immer voraussetzen, daß $\mathfrak{V}(x)$ aus offenen Mengen mit kompakter abgeschlossener Hülle (also Borel-Mengen) besteht. Für $x\in X$ definieren wir $d(x)=\inf\{\mu(V(x)): V(x)\in\mathfrak{V}(x)\}$.

Hilfssatz 2. *Es sei X ein lokal kompakter Hausdorffscher Raum und μ ein endliches Borel-Maß auf X. Dann ist die Menge $D=\{x\in X: d(x)>0\}$ abzählbar und $\sum_{x\in D}d(x)\leqq\sup\{\mu(E): E\in\mathfrak{B}\}$.*

Beweis. Sind die Punkte $x_i\in D$ $(1\leqq i\leqq n)$ beliebig gewählt, dann gibt es zufolge des Hausdorffschen Trennungsaxiomes n paarweise zueinander fremde Umgebungen $V_i(x_i)\in\mathfrak{V}(x_i)$ $(1\leqq i\leqq n)$. Aus der Ungleichung $\sum_{i=1}^{n}d(x_i)\leqq\sum_{i=1}^{n}\mu(V_i(x_i))=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}V_i(x_i)\right)\leqq\sup\{\mu(E): E\in\mathfrak{B}\}$ folgt die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Es sei X ein separabler lokal kompakter Hausdorffscher Raum ohne isolierte Punkte und μ ein endliches Borel-Maß auf X. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene, überall dichte Borel-Menge B, für die $\mu(B) < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Es sei C eine abzählbare überall dichte Untermenge und $D = \{x \in X\colon d(x) > 0\} = \{x_i\colon i \geqq 1\}$. Ferner sei N so gewählt, daß $\sum_{i=N+1}^{\infty} d(x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Da X keine isolierten Punkte enthält, ist die Menge $C \setminus \{x_i\colon 1 \leqq i \leqq N\} = \{y_n\colon n \geqq 1\}$ überall dicht. Für jedes n existiert eine Umgebung $V_n(y_n) \in \mathfrak{B}(y_n)$ derart, daß $\mu(V_n(y_n)) < d(y_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ gilt. Die Menge $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n(y_n)$ ist eine offene, überall dichte Borel-Menge vom Maß

$$\mu(B) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n(y_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(d(y_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \leqq \sum_{i=N+1}^{\infty} d(x_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Wir bemerken für später, daß die Aussage von Hilfssatz 3 und damit auch die des folgenden Satzes 1 richtig bleibt, wenn in X isolierte Punkte zwar vorhanden, aber (als einpunktige Mengen) Nullmengen sind. In diesem Falle gehört nämlich kein isolierter Punkt der Menge D an.

Satz 1. *Es sei X ein separabler lokal kompakter Hausdorffscher Raum ohne isolierte Punkte und μ ein (nicht notwendigerweise endliches) Borel-Maß auf X. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene, überall dichte Borel-Menge B, für die $\mu(B) < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Es sei $C = \{x_n\colon n \geqq 1\}$ eine abzählbare überall dichte Untermenge von X und für jedes n sei $V_n(x_n) \in \mathfrak{B}(x_n)$. Da $V_n(x_n)$ eine offene Untermenge von X mit kompakter abgeschlossener Hülle ist, genügt der in der relativen Topologie lokal kompakte Raum $X_n = V_n(x_n)$ und das auf $V_n(x_n)$ beschränkte Maß μ den Voraussetzungen von Hilfssatz 3. Wir wählen eine offene, in $V_n(x_n)$ dichte Untermenge $B_n \subset V_n(x_n)$ derart, daß $\mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ gilt, und setzen $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Die Menge B ist eine offene Borel-Menge in X. Ist W eine beliebige offene Menge in X und $x_n \in W$, dann ist $W \cap V_n(x_n)$ offen in $V_n(x_n)$ und $(W \cap B) \supset (W \cap B_n) = (W \cap V_n(x_n)) \cap B_n \neq 0$. Also ist B überall dicht. Außerdem gilt $\mu(B) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \varepsilon$.

Korollar 1.1. *In einem separablen lokal kompakten Hausdorffschen Raum X ohne isolierte Punkte ist das einzige im Sinne von (3) „stetige" Borel-Maß das triviale Maß.*

Die Schlußfolgerung von Satz 1 gilt speziell für jeden lokal kompakten Hausdorffschen Raum X ohne isolierte Punkte, der dem 2. Abzählbarkeitsaxiom genügt. In diesem Falle kann der Beweis auch ohne Heranziehung der Hilfssätze 2 und 3 folgendermaßen geführt werden: Ist $\mathfrak{B} = \{V_n\colon n \geqq 1\}$ eine Umgebungsbasis von X, bestehend aus offenen Mengen mit kompakter abgeschlossener Hülle, dann enthält jede Menge V_n wegen des Fehlens isolierter Punkte und zufolge des Hausdorffschen Trennungsaxioms unendlich viele paarweise zueinander fremde Umgebungen $V_{n,k} \in \mathfrak{V}$, also auch solche mit beliebig kleinem Maß. Wählen wir für jedes n eine solche Umgebung V_{n,k_n} derart, daß $\mu(V_{n,k_n}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, dann ist $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{n,k_n}$ eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften.

Die im Beweis von Satz 1 konstruierte Menge B ist, wie man dem Beweis von Hilfssatz 3 entnimmt, die Vereinigung von Umgebungen einer überall dichten Untermenge der Menge C. Wir merken daher als weitere Folgerung an:

Korollar 1.2. *Es sei X ein separabler lokal kompakter Hausdorffscher Raum ohne isolierte Punkte und μ ein Borel-Maß auf X. Ist C eine abzählbare überall dichte Menge in X, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine überall dichte Untermenge C_ε von C derart, daß $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt.*

Korollar 1.3. *Es sei X ein separabler lokal kompakter Hausdorffscher Raum ohne isolierte Punkte und μ ein Borel-Maß auf X. Dann gibt es eine Menge 1. Kategorie in X, deren Komplement eine Nullmenge ist.*

Beweis. Es sei für jedes n B_n eine offene, überall dichte Borel-Menge, für die $\mu(B_n) < \frac{1}{n}$ gilt. Dann ist das Komplement der Nullmenge $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ eine Menge 1. Kategorie in X.

Nach dem Baireschen Kategoriesatz ([3], S. 200) ist die in Korollar 1.3 erwähnte Nullmenge überall dicht in X; über ihre Mächtigkeit wird jedoch nichts weiter gesagt. Tatsächlich existiert unter der zusätzlichen Voraussetzung des 1. Abzählbarkeitsaxiomes eine abzählbare überall dichte Nullmenge in X. Allerdings würde man erwarten, daß eine entsprechende Aussage auch ohne diese Voraussetzung gilt.

Satz 2. *Es sei X ein separabler lokal kompakter Hausdorffscher Raum ohne isolierte Punkte, der dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügt, und μ ein Borel-Maß auf X. Dann existiert in X eine abzählbare überall dichte Nullmenge.*

Beweis. Es sei $C = \{x_n : n \geqq 1\}$ überall dicht in X und für jedes feste n sei $\mathfrak{V}(x_n) = \{V_k(x_n) : k \geqq 1\}$. Da X keine isolierten Punkte enthält, ist jede Menge $V_k(x_n)$ nach dem Baireschen Kategoriesatz überabzählbar. Wegen $\mu(V_k(x_n)) < \infty$ gibt es daher in $V_k(x_n)$ einen Punkt $x_{n,k}$, für den $\mu(\{x_{n,k}\}) = 0$ gilt. Die Menge $E = \{x_{n,k} : n \geqq 1,\ k \geqq 1\}$ ist dann eine abzählbare Nullmenge. Ist W eine beliebige offene Menge in X und $x_n \in W$, dann existiert ein Index k derart, daß $V_k(x_n) \subset W$ und weiter $x_{n,k} \in W$ gilt. Also ist E überall dicht in X.

Wir klären nun noch den allgemeineren Fall, in dem die Existenz isolierter Punkte des Raumes X zugelassen ist.

Satz 3. *Es sei X ein lokal kompakter Hausdorffscher Raum, Y die Menge der isolierten Punkte von X und $X \setminus Y$ separabel, sowie μ ein Borel-Maß auf X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *μ ist „stetig" im Sinne von* (1).

2) *μ ist „stetig" im Sinne von* (3).

3) *μ ist konzentriert auf Y.*

Beweis. Die Implikation 3) $\Rightarrow$ 1) haben wir bereits eingangs besprochen, die Implikation 1) $\Rightarrow$ 2) ist trivial. Es sei nun 2) erfüllt. Dann gilt $\mu(\{x\})=0$ für $x\in X\setminus Y$, speziell also auch für die in der relativen Topologie möglicherweise vorhandenen isolierten Punkte von $X\setminus Y$. Nach der dem Satz 1 vorangestellten Bemerkung existiert eine in der relativen Topologie offene, überall dichte Borel-Untermenge des topologischen Raumes $X\setminus Y$, deren Maß kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon>0$ ist. Wie im Beweis von Hilfssatz 1 ergibt sich aus der Annahme, μ wäre nicht konzentriert auf Y (d.h. es gäbe eine Borel-Menge $M\subset X\setminus Y$ mit positivem Maß) ein Widerspruch zur vorausgesetzten „Stetigkeit" von μ im Sinne von (3), also gilt die Behauptung 3).

Zum Abschluß führen wir zur Illustration der am Ende des ersten Absatzes gemachten Bemerkung ein Beispiel einer Borel-Menge an, deren abgeschlossene Hülle keine Borel-Menge ist.

Es sei $X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ das topologische Produkt einer abzählbar unendlichen Menge von Exemplaren des diskreten, aus zwei Elementen bestehenden Raumes $X_i=\{0,1\}$ $(i\geqq 1)$. Wir bezeichnen die i-te Komponente eines Punktes $x\in X$ mit x_i und schreiben $x=(x_i)$. Die Umgebung $\{y\in X\colon y_{i_j}=x_{i_j},\ 1\leqq j\leqq k\}$ des Punktes x in X bezeichnen wir mit $V(y_{i_1}=x_{i_1},\ldots,y_{i_k}=x_{i_k})$. Sie ist in X offen und abgeschlossen. Nach dem Satz von TYCHONOFF ist X kompakt. Wir betrachten die Untermenge $Z=\prod_{i=1}^{\infty} Z_i$ von X, wobei $Z_i=X_i$ für $i=2k$ und $Z_i=\{0\}$ für $i=2k-1$ ist $(k\geqq 1)$, und ihr Komplement $Z'=X\setminus Z$. Die Menge Z ist (ebenso wie Z') überabzählbar. Für $x\in Z'$ gilt $x_{2k-1}=1$ für mindestens ein $k\geqq 1$ und weiter $x\in V(y_{2k-1}=1)\subset Z'$, also ist Z' offen und Z abgeschlossen in X. Ist $z=(z_i)\in Z$ und $V(y_{i_1}=z_{i_1},\ldots,y_{i_k}=z_{i_k})$ eine beliebige Umgebung von z (wir setzen immer $i_1<i_2<\cdots<i_k$ voraus), dann gilt $[V(y_{i_1}=z_{i_1},\ldots,y_{i_k}=z_{i_k})\cap Z']\supset V(y_{i_1}=z_{i_1},\ldots,y_{i_k}=z_{i_k},y_{2i_k+1}=1)$, also ist Z' überall dicht in X.

Wir definieren nun in der Menge aller Punkte von X eine neue Topologie auf folgende Weise: eine Umgebungsbasis für einen Punkt $x\in Z'$ sei gegeben durch alle Mengen von der Form $\overline{W}(x)=V(y_{i_1}=x_{i_1},\ldots,y_{i_k}=x_{i_k})\cap Z'$, ein solches für einen Punkt $z\in Z$ durch alle Mengen von der Form $\overline{W}(z)=\{z\}\cup[V(y_{i_1}=z_{i_1},\ldots,y_{i_k}=z_{i_k})\cap Z']$. Die Klasse aller so erhaltenen Mengen $\overline{W}$ erfüllt alle Axiome für eine aus offenen Mengen bestehende Umgebungsbasis eines topologischen Raumes ([*3*], S. 47), den wir, um ihn von X zu unterscheiden, mit $\overline{X}$ bezeichnen.

Da es bereits in X für zwei verschiedene Punkte getrennte Umgebungen gibt, gilt das gleiche für $\overline{X}$, also ist $\overline{X}$ Hausdorffsch. Die Menge Z' ist sowohl in X als auch in $\overline{X}$ offen und auf ihr stimmen die Topologien von X und $\overline{X}$ überein. Insbesondere ist jede Umgebung $\overline{W}$ eines Punktes $x\in Z'$ offen, abgeschlossen und kompakt. Das gleiche gilt dann für die jeweils nur durch Hinzunahme des Punktes z erhaltenen Umgebungen $\overline{W}$ eines Punktes $z\in Z$. Also ist $\overline{X}$ lokal kompakt. Die offene Menge Z' ist in $\overline{X}$ wie in X σ-kompakt (es gibt überhaupt nur abzählbar viele Umgebungsmengen $V(y_{i_1}=x_{i_1},\ldots,$

$y_{ik}=x_{ik})$), also Borel-Menge, und außerdem dicht in $\bar{X}$. Eine kompakte Untermenge von $\bar{X}$ kann nur endlich viele Punkte von Z enthalten, eine σ-kompakte Untermenge von X also höchstens abzählbar unendlich viele. Die Menge Z enthält aber überabzählbar viele Punkte, also ist $\bar{X}$ nicht σ-kompakt. Die Menge $M=Z'$ ist daher eine Borel-Menge in $\bar{X}$, deren abgeschlossene Hülle keine Borel-Menge ist.

Eine leichte Verschärfung der gemachten Aussagen ergibt sich, wenn wir statt eines Borel-Maßes jeweils ein Bairesches Maß, d.h. ein auf dem σ-Ring $\mathfrak{B}_0$ der Baireschen Mengen definiertes Maß μ betrachten (hierbei ist $\mathfrak{B}_0$ der von allen kompakten G_δ-Mengen erzeugte σ-Ring). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir nämlich annehmen, daß jede Umgebungsbasis $\mathfrak{B}(x)$ aus offenen Baireschen Mengen mit kompakter abgeschlossener Hülle besteht ([2], § 50 D und S. 220). Dann bleiben die Hilfssätze 2 und 3, die Sätze 1 und 2 und die Korollare 1.2 und 1.3 richtig, wenn wir stets „Borel-Maß" durch „Bairesches Maß", $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{B}_0$ und „Borel-Menge" durch „Bairesche Menge" ersetzen. Ebenso ist die zuletzt konstruierte offene Menge Z' sowohl in X als auch in $\bar{X}$ sogar Bairesche Menge, da der kompakte Raum X dem 2. Abzählbarkeitsaxiom genügt ([2], § 50 E).

Literatur

[1] CIGLER, J.: Der individuelle Ergodensatz in der Theorie der Gleichverteilung mod 1. J. reine angew. Math. 205, 91–100 (1960).
[2] HALMOS, P. R.: Measure Theory. New York: Van Nostrand 1956.
[3] KELLEY, J. L.: General Topology. New York: Van Nostrand 1955.
[4] NATANSON, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin: Akademie-Verlag 1954.
[5] WINTNER, A.: The Fourier Transforms of Probability Distributions. Baltimore 1947.

Amsterdam, Mathematisches Institut der Universiteit van Amsterdam und Mathematisches Zentrum

(Eingegangen am 26. Juni 1963)